II. EFEK INTERFERENSI DAN DIFRAKSI GELOMBANG

2.1 Gelombang Elektromagnetik

Persamaan Maxwell untuk medan elektromagnetik di dalam suatu medium (MKS):

$$\nabla \cdot \mathrm{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial \mathrm{t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial \mathrm{t}$$

Persamaan konstitutif untuk medium dielektrik linear dan isotropik

$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \cong \mu_0 \mathbf{H}$, kecuali medium magnetik

$\sigma = 0$

Persamaan konstitutif untuk medium konduktif linear dan isotropic ditambah dengan hubungan

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Persamaan gelombang dalam medium dielektrik

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathrm{t}) \end{Bmatrix} = 0$$

dengan $\nu^2 = (\mu\varepsilon)$.

Persamaan gelombang dalam medium konduktif

$$\left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathrm{t}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathrm{t}) \end{Bmatrix} = 0$$

Solusi paling sederhana dalam medium dielektrik

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \mathrm{E}_0 \, e^{i(\omega t \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$$

dimana gelombang adalah monokromatik dengan $\boldsymbol{\nu} = (\omega/k)\ \mathbf{k}$, amplitudo tetap, muka gelombang datar, **E** dan **B** sefasa, serta polarisasi transversal

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\nu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

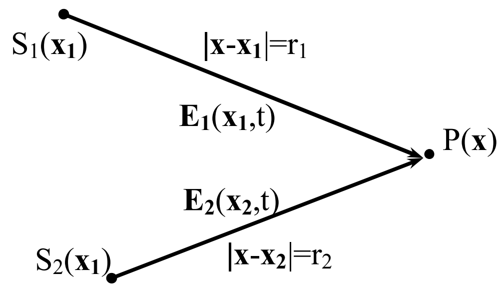
Rapat arus energi (intensitas) gelombang

$$\langle \mathrm{Re}(\mathbf{S}) \rangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(E\times H)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon|\mathbf{E_0}|^2\,\mathbf{v} = <\mathbf{u}>\,\mathbf{v}$$

2.2 Superposisi Linear dan Efek Interferensi

Prinsip superposisi :

efek dari dua gelombang terpisah yang tiba pada titik yang sama pada saat yang sama dinyatakan oleh superposisi linear dari kedua gelombang tersebut:



$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E_1}(\mathbf{x},t) + \mathbf{E_2}(\mathbf{x},t)$$

Intensitas gelombang total:

$$I(\mathbf{x}) = \langle \mathrm{Re}(\mathbf{E})\cdot\mathrm{Re}(\mathbf{E})\rangle = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon v\,\langle \mathrm{Re}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\rangle = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon v\,\langle\,|\mathbf{E}(t)|^2\,\rangle$$

$$\text{atau} = \tfrac{1}{2}\,\langle\,|\mathbf{E}(\mathbf{x},t)|\,\rangle \text{, dalam satuan } \varepsilon v$$

Andaikan

$$E_1(x,\mathbf{t}) = E_{10}\,\exp^{i(\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi)}$$

$$E_2(x,\mathbf{t}) = E_{10}\,\exp^{i(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi)}$$

Maka

$$I(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\,\langle\,(\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2})\cdot(\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2})^*\,\rangle$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[\,|\mathbf{E_1}|^2 + |\mathbf{E_2}|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle\,\mathbf{E_1}\cdot\mathbf{E_2}^*\,\rangle\,]$$

$$= I_1 + I_2 + \langle\,I_{12}\,\rangle$$

Suku interferensi

$$\langle\,I_{12}\,\rangle = 2\,(I_1 I_2)^{1/2}\,(\mathbf{E_{10}}\cdot\mathbf{E_{20}})\,\langle\,\cos\Phi\,\rangle$$

$$\Phi = (\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 r_1 - k_2 r_2) + (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Jelas bahwa intensitas total I pada umumnya bervariasi dengan t dan **x**, dan menghasilkan pola interferensi yang berubah dengan waktu. Jelas pula bahwa pola interferensi tersebut akan lenyap jika $\langle \cos \Phi \rangle = 0$ atau $\langle I_{12} \rangle = 0$. Yakni, apabila:

$\mathbf{E_{10}} \perp \mathbf{E_{20}}$

$\omega_1 \neq \omega_2$

$\varphi_1 - \varphi_2$ berubah fluktuatif dan cepat

Pola interferensi menjadi stasioner bila berlaku syarat koherensi

$\omega_1 = \omega_2$, $k_1 = k_2$ (dalam medium yang sama)

$\varphi_1 - \varphi_2$ berubah lambat dibandingkan waktu perekaman

$\cong$ konstan ($\Delta\varphi$)

Untuk $k_1 = k_2$,

$$\langle I_{12} \rangle = 2\,(I_1 I_2)^{1/2} \cos(k\Delta r + \Delta\varphi),\ r = r_1 - r_2$$

dan

$$I(\Delta r) = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)\cos(k\Delta r + \Delta\varphi)\,, \qquad \mathbf{E_{10}} \,//\, \mathbf{E_{20}}$$

$$= 2\,I_0\,[1 + \cos(k\Delta r + \Delta\varphi)\,, \qquad I_1 = I_2 = I_0$$

$$I_{maks} = (I_1^{1/2} + I_2^{1/2})^2 \rightarrow 4I_0$$

$$I_{min} = (I_1^{1/2} - I_2^{1/2})^2 \rightarrow 0$$

Untuk 2 gelombang yang inkoheren sempurna:

$$\cos \langle \Phi \rangle = 0$$

dan

$$I = I_1 + I_2\ \text{, tanpa suku koheren}$$

$$= 2I_0\,, \qquad I_1 = I_2 = I_0$$

Koheren parsial:

$$\mathrm{Re}\,\langle \mathbf{E_1} \cdot \mathbf{E_2}^* \rangle = \mathrm{Re}\,\Gamma_{12}(\tau)$$

dimana $\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t)\, E_1^*(t+\tau) \rangle$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E_1(t) E_2(t+\tau)\,dt$$

$= 0$, untuk kasus inkoheren total

Jelas bahwa

$$\Gamma_{11}(\tau) = \Gamma_{11}(0) = 2I_1\,,\ \Gamma_{22}(\tau) = \Gamma_{22}(0) = 2I_2$$

2.3 Interferensi Fabry-Perot (FP)

Gejala interferensi akibat pemantulan berulang antara 2 pelat paralel identik dan tipis (abaikan ketebalan pelat d_0). Andaikan n dalam tiga daerah yang dipisahkan oleh pelat tidak berbeda. Selanjutnya akan digunakan notasi

$t = t_{01}\, t_{10}$

$r = r_{01}\, r_{10}$

Andaikan pula $\varphi_1 = \varphi_2$. Maka karena $\omega_1 = \omega_2$, beda fasa antara dua berkas gelombang ditentukan oleh

1. $k\Delta r = \varphi_1$
2. pergeseran fasa akibat pemantulan φ_n

Jadi kita tinjau pertama Δr. Jelas dari gambar,

$$\Delta r = (P_1P_2 + P_2P_4 + P_4P_5) - (P_1P_2 + P_2P_3)$$
$$= 2\, P_1P_2 - P_2P_3 = 2\Delta\, /\cos\theta - P_2P_5 \sin\theta = 2d \cos\theta$$

dan

$$\varphi_l = kd \cos\theta$$

Selanjutnya

$$\rho = |\rho|\, e^{i\varphi_r}\ ,\ \rho^2 = |\rho|^2\, e^{i2\varphi_r}$$

Jadi perbedaan fasa total

$$\varphi_1 = \varphi_l + \varphi_r$$

Superposisi medan transisi

$$E_t = t^2\, E_0 + e^{i2\varphi_r}\, t^2\, |\rho|^2\, E_0 + e^{i4\varphi_r}\, t^2\, |\rho|^4\, E_0 + \ldots$$
$$= \frac{t^2 E_0}{1 - |\rho|^2\, e^{i2\varphi}}$$

$$I_t = \frac{t^4}{|1 - |\rho|^2\, e^{i2\varphi}|^2} I_0$$

Untuk n yang sama dalam ketiga daerah dan $\theta \cong 0$ dapat diambil aproksimasi

$$T = |t|^2\ ,\ R = |\rho|^2$$

Sebagai akibatnya

$$I_t = \frac{T^2}{|1 - Re^{i2\varphi}|^2} I_0$$

dimana

$$|1 - Re^{i2\varphi}|^2 = (1 - R^2)\left[1 + \frac{4R}{(1-R^2)}\sin^2\varphi\right]$$

Jadi

$$I_t = I_0\left(\frac{T^2}{1-R^2}\right)\left[\frac{1}{(1+F\sin^2\varphi)}\right] = \frac{(I_t)_{maks}}{1+F\sin^2\varphi}$$

dengan

$F = \dfrac{4R}{(1-R^2)}$ adalah koefisien *finess*

$\dfrac{1}{(1+F\sin^2\varphi)} = A(\varphi)$ adalah fungsi Airy

Jelas bahwa

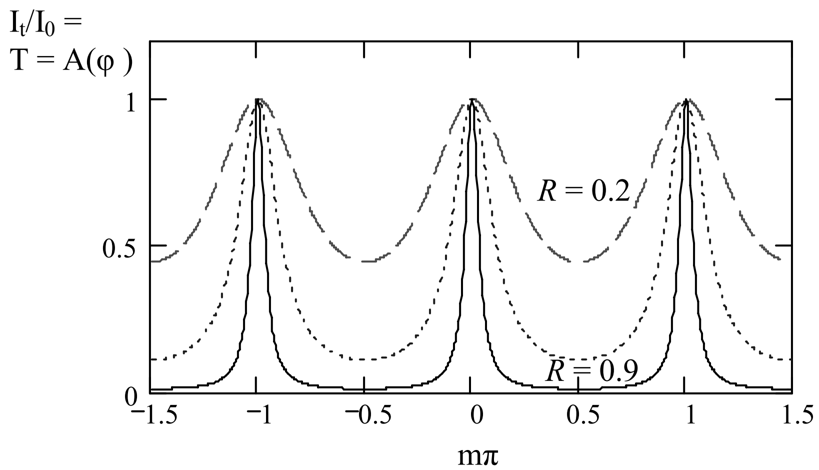
I_t = maks pada $\varphi = \pm m\pi$, m = 0,1,2,3,…

$= I_0$

Perhatikan bahwa

$$\frac{I_{maks}}{I_{min}} = 1 + F$$

Kualitas Fungsi Interferensi



1. $V = \dfrac{I_{maks} - I_{min}}{I_{maks} + I_{min}} = \dfrac{F}{2+F} = \dfrac{R}{2+R^2}$

   $V \to 1,\ R \to 1,\ F \to \infty$

   $V \to 0,\ R \to 0,\ F \to 0$

2. Lebar fringe interferensi

   Dari ungkapan

$$I_t = \frac{I_0}{1+F\sin^2\varphi} = \frac{I_0}{1+F\sin^2(m\pi-\varphi)^2} \cong \frac{I_0}{1+F(m\pi-\varphi)^2} = \frac{I_0/F}{1/F+(\varphi-m\pi)^2}$$

   menyerupai fungsi Lorentzian. Dengan $I_t = I_0/2$, maka

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+F(\varepsilon/2)^2}\ ,\ \varphi\text{–}m\pi=\varepsilon/2$$

   Jadi $\varepsilon = 2/F^{1/2}$: FWHM

   $\to 0,\quad F \to \infty$ atau $R \to 1$

Aplikasi

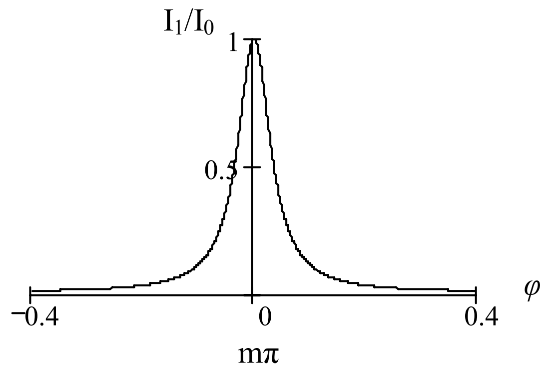
1. Resonator/etalon F-P dalam spektrosokopi sebagai monokromator
2. Resonator laser untuk penapisan modus aksial/longitudinalnya
3. Pengukuran panjang gelombang dengan presisi tinggi

$$kd\cos\theta + \varphi = m\pi$$

Parameter Spektroskopi

Daya resolusi: daya pisah antara 2 fringe interferensi dari 2 gelombang berbeda.

Pedoman Rayleigh: $\dfrac{I_{min}}{I_{maks}} \le \dfrac{8}{\pi^2}$



Andaikan fringe identik

$$I_{maks} = (I_1)_{maks} + I_2\,(\varphi_2 - \delta\varphi)$$

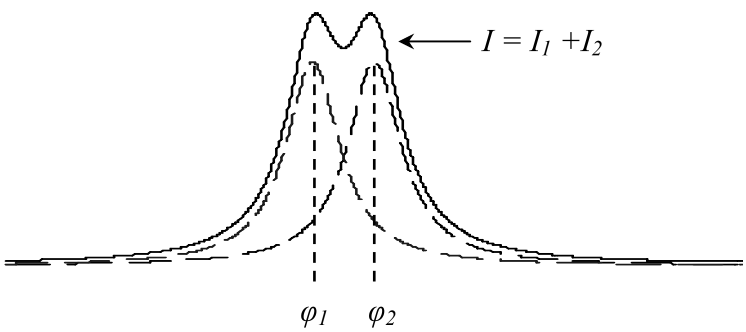
$$I_{min} = I_1\,(\varphi_1 + \delta\varphi_2) + I_2\,(\varphi_2 + \delta\varphi/2) = 2I_1\,(\varphi_1 + \delta\varphi/2)$$

$$\delta\varphi = \frac{4.149}{\sqrt{F}} \cong \frac{4.2}{\sqrt{F}} = 2.1\left(\frac{1-R}{\sqrt{R}}\right)$$

$$\rightarrow 2.4\left(\frac{1-R}{\sqrt{R}}\right) \text{ untuk R besar } (\ I_2(\varphi_2 + \delta\varphi) \cong 0\ )$$

untuk fringe orde ke-m

$$D.R = \frac{\pi}{2.4} m\sqrt{F}\ ,\ \frac{d}{\lambda} = m/2 \ \text{ untuk } \theta \cong 0$$



2.4 Efek Difraksi

Celah 1 dimensi

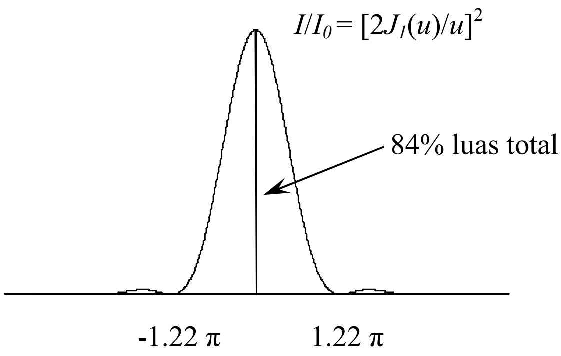
$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2(\varphi)$$

$$I_0 = I(\varphi=0)$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\, kd \sin\theta$$

Minimum pertama terjadi pada $\varphi = \pm\,\pi$

Lebar fringe pada setengah maks (FWHM) adalah $\varepsilon \cong \pi$



Besar sudut difraksi $\theta_D \cong \theta_m$, yakni:

$$\tfrac{1}{2}\, kd\, \theta_m \cong \pi$$

$$\rightarrow \theta_D \cong \lambda/d$$

Celah lingkaran (pinhole)

$$I(u) = I0\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2 \quad , J_1(u) = \text{fungsi Bessel orde pertama}$$

$u = kr \sin\theta$

$\tfrac{1}{2}\, kD \sin\theta$

Lebar fringe :

$\varepsilon \cong u$ untuk I_{min} pertama $= 1.22\pi$

$\cong$ FWHM

$$\theta_D \cong \sin\theta = \frac{2}{kD} 1.22\pi = \frac{1.22\lambda}{D}$$

$$\theta_D \cong 1.22\left(\frac{\lambda}{D}\right)$$

Contoh efek difraksi

1. Pada sistem kisi N celah : modulasi fringe interferensi

2. Pada daya pemfokusan lensa :
   Kasus cahaya dengan distribusi intensitas uniform pada bidang transversal (profil intensitas uniform)

$$\theta_D = 1.22\left(\frac{\lambda}{D}\right)$$

dari gambar tampak $2\theta_D \cong d/f$

Jadi

$$d = 2.44\left(\frac{\lambda}{D}\right)f$$

Jelas bahwa $d \rightarrow 0$, jika $\lambda/D \rightarrow 0$ ($D \gg \lambda$)

atau $f \rightarrow 0$

Akibat efek difraksi pada bidang fokus akan terbentuk pola interferensi berupa cincin terang-gelap yang melemah dengan jarak dari pusatnya.

3. Efek difraksi dengan distribusi intensitas yang berbentuk Gaussian pada bidang penampang berkas (transversal).

$$I(r) = I_0\, e^{-2r^2/W^2}$$

$I(r=0) = I_0$, pada pusat berkas

$I(r=W) = 0.135\ I_0$

W = spot size berkas

Spot size berkas pada bidang fokus

$$W_0 = \frac{\lambda f}{\pi W} \rightarrow 0\ ,\ W \rightarrow \infty$$

Distribusi intensitas pada bidang fokus

$$I(r) = I_0' e^{-2r^2/W^2} \qquad \rightarrow \text{tetap Gaussian}$$

Catatan: dengan $D = 2W$, $d=2W_0$, maka rumus di atas menjadi

$$d = \left(\frac{4\lambda f}{\pi D}\right) = \frac{1.27\lambda f}{D}$$